

Připomenutí teorie

- (*O implicitní funkci*): Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina. Nechť $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že $[x_0, y_0] \in G$. Nechť dále

- (i) $F \in C^1(G)$;
- (ii) $F(x_0, y_0) = 0$;
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bodu x_0 a okolí $V \subseteq \mathbb{R}$ bodu y_0 takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ takové, že $F(x, y) = 0$. Píšeme-li $f(x) = y$, pak $f \in C^1(U)$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}. \quad (1)$$

Věta výše nám tedy říká, že za daných předpokladů je na nějakém okolí bodu x_0 rovností $F(x, f(x)) = 0$ „implicitně“ definovaná funkce f . Derivací této rovnosti podle x_j jsme pak dostali rovnost (1). Konkrétně použitím derivace složené funkce dostaneme:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} (F(x, f(x))) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x). \quad (2)$$

Z tohoto pak už snadno plyne rovnost (1).

Je-li $F \in C^2(G)$, můžeme volit okolí U, V tak, aby $f \in C^2(U)$ a počítat parciální derivace vyšších řádů. První možnost je rovnou zderivovat rovnost (1). Druhou možností je zderivovat rovnost (2) a z výsledku si pak vyjádřit hledanou derivaci druhého řádu. Většinou bývá lepší použít druhou možnost (nemusíme derivovat „zlomek“). V následujícím příkladu použijeme druhou možnost:

Řešený příklad

Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 3$$

určuje na okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 1]$ implicitně zadanou funkci f třídy C^2 a spočítejte $f'(1)$ a $f''(1)$.

Nejprve si uvědomíme, že $F(x, y) = x^y + y^x - 3$ je třídy C^2 na otevřené množině $G = (0, \infty) \times (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$. Spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} + y^x \log y; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^y \log x + xy^{x-1}.$$

Tedy máme $F(2, 1) = 2 + 1 - 3 = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial x}(2, 1) = 1 + 0 = 1 \neq 0$. Tedy máme splněny předpoklady VOIF a existuje okolí U bodu y_0 a V okolí bodu x_0 , že pro každé $y \in U$ existuje právě jedno $x = f(y) \in V$ takové, že $F(f(y), y) = 0$ a funkce f je třídy C^2 . Dále platí $f(y_0) = x_0$, tj. $f(1) = 2$.

Zbývá spočítat derivace. Nejprve si spočteme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial F}{\partial x}(2, 1) = 1 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial F}{\partial y}(2, 1) = 2 \log 2 + 2\end{aligned}$$

Zderivujeme rovnost $F(f(y), y) = 0$ podle y a dostaneme

$$\begin{aligned}0 &= (0)' = (F(f(y), y))' = \left(f(y)^y + y^{f(y)} - 3\right)' = \\ &= y^{f(y)} \left(\log(y) f'(y) + \frac{f(y)}{y}\right) + f(y)^y \left(\frac{y f'(y)}{f(y)} + \log(f(y))\right).\end{aligned}\quad (*)$$

Dosadíme $y = 1$ a $f(y) = 2$ a dostaneme

$$0 = 1^2 \left(0 \cdot f'(1) + \frac{2}{1}\right) + 2^1 \left(\frac{1 \cdot f'(1)}{2} + \log(2)\right) = 2 + f'(1) + 2 \log(2).$$

Tedy $f'(1) = -2 - 2 \log(2)$. Druhou derivaci spočteme opětovnou derivací rovnice (*):

$$\begin{aligned}0 &= y^{f(y)} \left(\log(y) f'(y) + \frac{f(y)}{y}\right)^2 + f(y)^y \left(\frac{y f'(y)}{f(y)} + \log(f(y))\right)^2 + \\ &+ y^{f(y)} \left(\log(y) f''(y) + \frac{2 f'(y)}{y} - \frac{f(y)}{y^2}\right) + f(y)^y \left(\frac{y f''(y)}{f(y)} - \frac{y f'(y)^2}{f(y)^2} + \frac{2 f'(y)}{f(y)}\right).\end{aligned}$$

Dosadíme $y = 1$, $f(y) = 2$ a $f'(y) = -2 - 2 \log(2)$ a dostaneme

$$\begin{aligned}0 &= 1^2 \left(0 \cdot (-2 - 2 \log(2)) + \frac{2}{1}\right)^2 + 2^1 \left(\frac{1(-2 - 2 \log(2))}{2} + \log(2)\right)^2 + \\ &+ 1^2 \left(0 \cdot f''(1) + \frac{2(-2 - 2 \log(2))}{1} - \frac{2}{1^2}\right) + \\ &+ 2^1 \left(\frac{1 \cdot f''(1)}{2} - \frac{1 \cdot (-2 - 2 \log(2))^2}{2^2} + \frac{2(-2 - 2 \log(2))}{2}\right) = \\ &= 4 + 2 - 6 - 4 \log(2) + f''(1) - 2(1 + 2 \log(2) + \log^2(2)) - 4 - 4 \log(2) = \\ &= f''(1) - 12 \log(2) - 6 - 2 \log^2(2).\end{aligned}$$

Tedy $f''(1) = 6 + 12 \log(2) + 2 \log^2(2)$.